

# Modelování poddajných soustav s použitím redukovaných subsystémů

Jan Kolda

ČVUT v Praze, Fakulta strojní

3. července 2013

# Obsah prezentace

- 1 Úvod
- 2 Princip redukce a spojování komponent
  - Redukce komponent
  - Spojení redukovaných modelů
- 3 Metody stanovení modální věrnosti redukovaných modelů
- 4 Příklad 1: spojená ramena
  - Příklad vlastního tvaru volného kmitání
  - Modální věrnost po redukci
- 5 Příklad 2: deska s otvory
  - Příklady vlastních tvarů volného kmitání
  - Modální věrnost po redukci
- 6 Závěr, diskuze výsledků

# Úvod

- Netlumené kmitání lineárních mechanických soustav popisují matice  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ .
- Potřeba redukce počtu (elastických) stupňů volnosti mechanického modelu vyvstává např. při:
  - analýze mechanismů v mnoha polohách,
  - optimalizaci (mnoho rozměrových variant),
  - aktivním potlačování vibrací.
- Cíle práce:
  - popsat tři metody redukce: vypuštění modálních souřadnic, Rubinovu metodu a Craig-Bamptonovu metodu,
  - naprogramovat metody v prostředí MATLAB,
  - ověřit modální věrnost redukováných modelů na dvou příkladech.

# Redukce komponent

Obecný algoritmus:

- 1 Rozdělení soustavy na komponenty.
- 2 Stanovení matic  $\mathbf{M}^{(i)}$ ,  $\mathbf{K}^{(i)}$ .
- 3 Redukce mechanických modelů komponent:

$$\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{T}^{(i)} \mathbf{p}^{(i)} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \widetilde{\mathbf{M}}^{(i)} = \left(\mathbf{T}^{(i)}\right)^T \mathbf{M}^{(i)} \mathbf{T}^{(i)} \\ \widetilde{\mathbf{K}}^{(i)} = \left(\mathbf{T}^{(i)}\right)^T \mathbf{K}^{(i)} \mathbf{T}^{(i)} \end{cases} \cdot \quad (1)$$

## Spojení redukovaných modelů

- ④ Sestavení pro případ dvou komponent:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{M}}^{(1)} \\ \widetilde{\mathbf{M}}^{(2)} \end{bmatrix}}_{\widetilde{\mathbf{M}}_{\text{záv}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{p}}^{(1)} \\ \ddot{\mathbf{p}}^{(2)} \end{Bmatrix}}_{\widetilde{\mathbf{K}}_{\text{záv}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{K}}^{(1)} \\ \widetilde{\mathbf{K}}^{(2)} \end{bmatrix}}_{\widetilde{\mathbf{K}}_{\text{záv}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{p}^{(1)} \\ \mathbf{p}^{(2)} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

- ⑤ Zohlednění vazbové rovnice na rozhraní komponent  
 $\mathbf{u}_b^{(1)} = \mathbf{u}_b^{(2)}$  pomocí transformace závislých zobecněných souřadnic  $\mathbf{p}$  na nezávislé  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{p} = \mathbf{S}\mathbf{q}. \quad (3)$$

- ⑥ Stanovení výsledných redukovaných matic  $\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\mathbf{K}}$ :

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{S}^T \widetilde{\mathbf{M}}_{\text{záv}} \mathbf{S}, \quad \widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{S}^T \widetilde{\mathbf{K}}_{\text{záv}} \mathbf{S}. \quad (4)$$

# Metody stanovení modální věrnosti redukováných modelů

- ① Relativní frekvenční chyba:

$$\epsilon_i = \left| \frac{\tilde{\Omega}_i - \Omega_i}{\Omega_i} \right| \cdot 100\%. \quad (5)$$

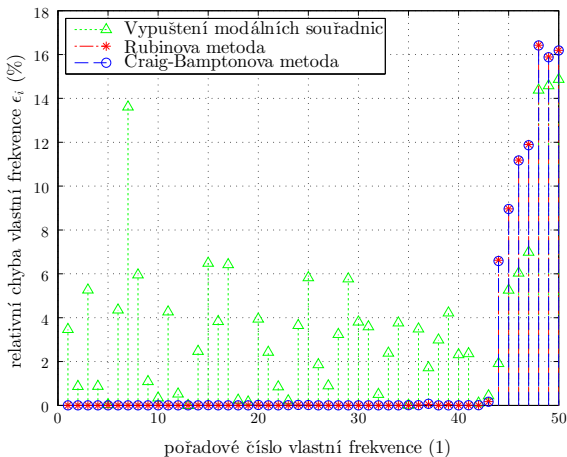
- ② Kritérium modální věrnosti (MAC):

$$\text{MAC}_{i,j} = \frac{(\mathbf{v}_i^T \tilde{\mathbf{v}}_j)^2}{(\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i) (\tilde{\mathbf{v}}_j^T \tilde{\mathbf{v}}_j)}. \quad (6)$$

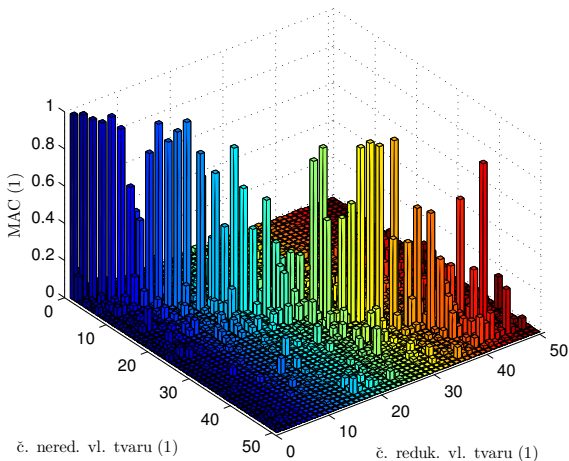
# Příklad 1: spojená ramena

Obrázek 1 : 5. vlastní tvar volného kmitání ramen,  $\nu_5 = 1220$  Hz

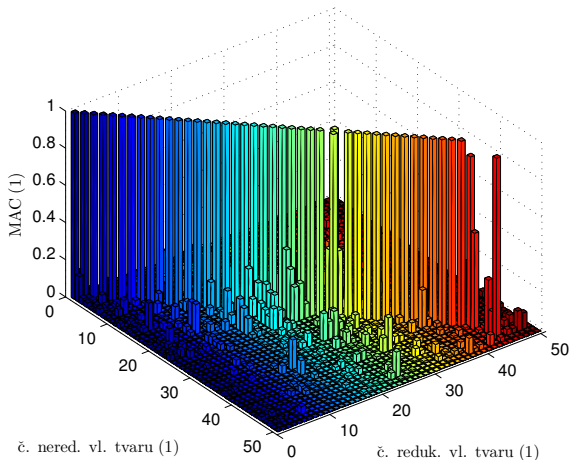




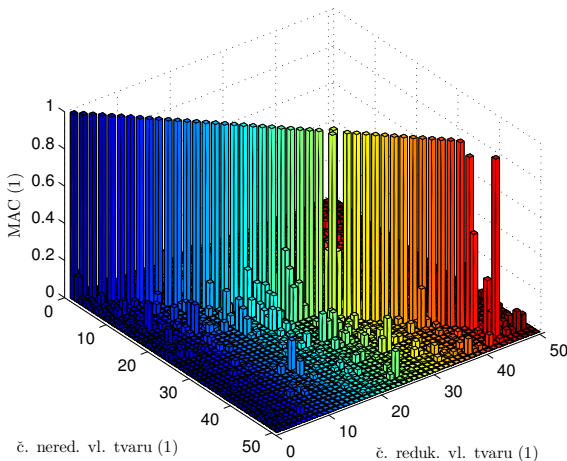
Obrázek 2 : Relativní frekvenční chyba modelu spojených ramen redukovaného podle jednotlivých metod.



**Obrázek 3 :** MAC kritérium modelu spojených ramen redukovaného metodou vypuštění modálních souřadnic.



Obrázek 4 : MAC kritérium modelu spojených ramen redukovaného Rubinovou metodou (metodou s rezidui).

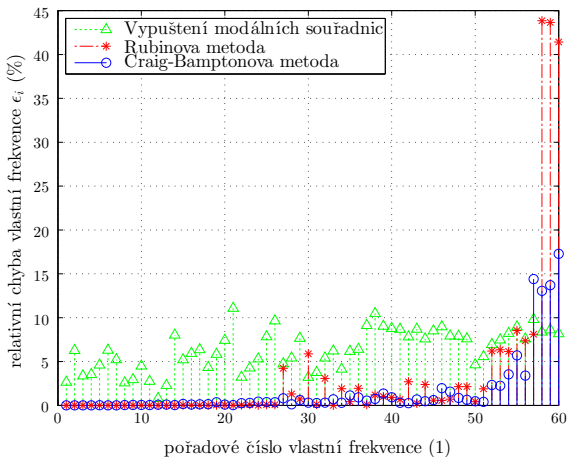


Obrázek 5 : MAC kritérium modelu spojených ramen redukovaného Craig-Bamptonovou metodou.

## Příklad 2: deska s otvory

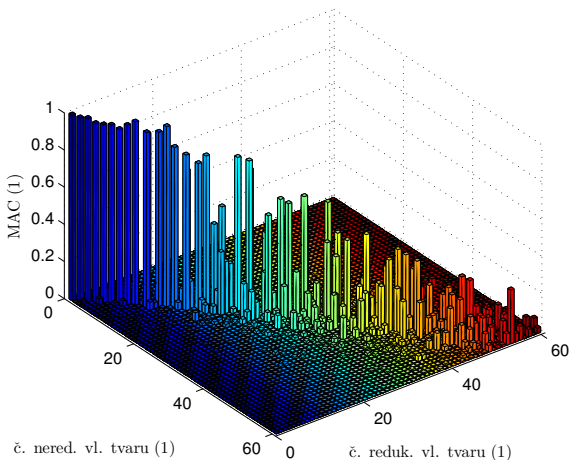
Obrázek 6 : 4. vlastní tvar volného kmitání desky,  $\nu_4 = 1056$  Hz

Obrázek 7 : 6. vlastní tvar volného kmitání desky,  $\nu_6 = 1550$  Hz

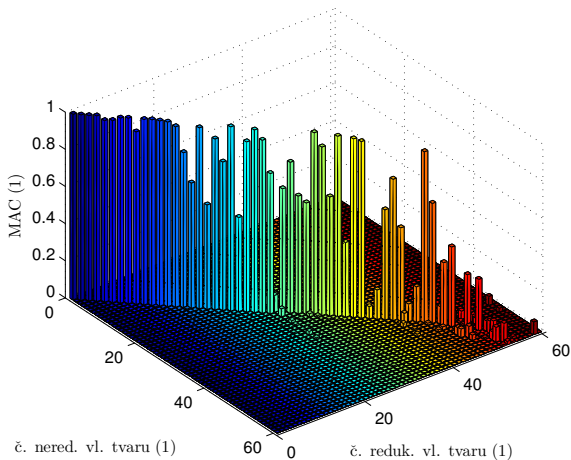


Obrázek 8 : Relativní frekvenční chyba modelu desky redukovaného podle jednotlivých metod.

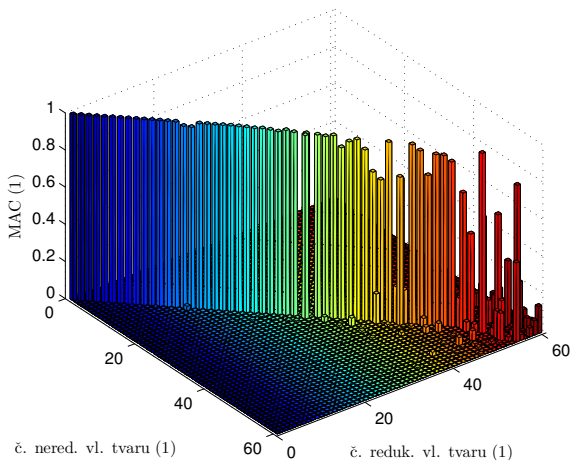




**Obrázek 9 :** MAC kritérium modelu desky redukovaného metodou vypuštění modálních souřadnic.



**Obrázek 10 :** MAC kritérium modelu desky redukovaného Rubinovou metodou (metodou s rezidui).



**Obrázek 11 :** MAC kritérium modelu desky redukovaného Craig-Bamptonovou metodou.

## Závěr, diskuze výsledků

- Byly vytvořeny celkem 4 programy v prostředí MATLAB.
- Programy byly aplikovány na dva příklady.
- Byla porovnána modální věrnost modelů po redukci s neredukovaným řešením.
- Potvrdilo se výrazné zpřesnění při zahrnutí statických tvarů do transformačních matic.

Děkuji za pozornost.