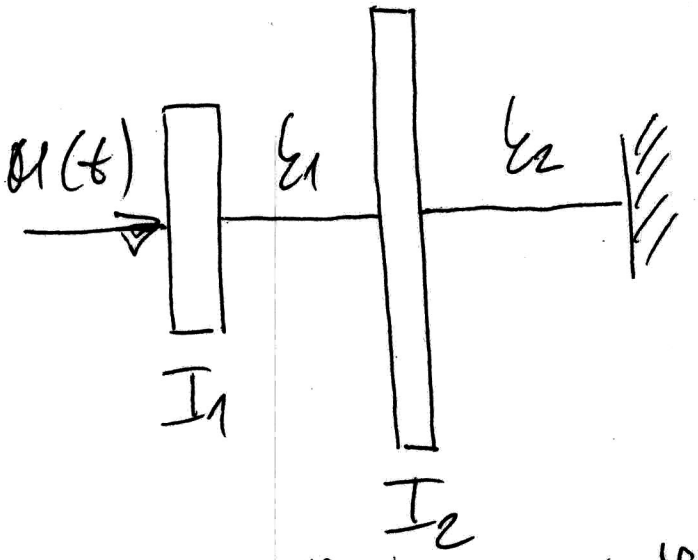

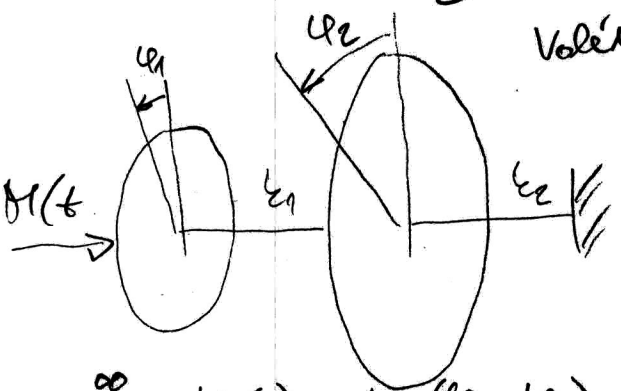

volím $\varphi_1 < \varphi_2$

$$I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 = M(t) + k_1(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$I_2 \ddot{\varphi}_2 = -k_1(\varphi_2 - \varphi_1) - k_2 \cdot \varphi_2$$

D: $I_1 = 0{,}17\ kg\,m^2$

$I_2 = 0{,}38\ kg\,m^2$

$k_1 = 2{,}61 \cdot 10^5\ Nm/rad$

$k_2 = 1{,}68 \cdot 10^5\ Nm/rad$

$M(t) = M_0 \sin \omega t$

$M_0 = 5\ Nm$

$\omega = 1300\ s^{-1}$

poč. p. $t = 0$

$\varphi_1(0) = 0{,}0001\ rad$

$\varphi_2(0) = 0{,}003\ rad$

$\dot{\varphi}_1(0) = 0\ s^{-1}$

$\dot{\varphi}_2(0) = 0\ s^{-1}$

Maticový zápis

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin \omega t$$

$$\underline{M}\,\ddot{\underline{x}} + \underline{K}\,\underline{x} = \underline{f}_0 \sin \omega t$$

Soustava lineárních dif. rovnic s konstantními koeficienty

$\Rightarrow x_c = x_a + x_p$

Volné kmitání

$\underline{M}\ddot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x} = \underline{0}$ → předpokládáme harmonický pohyb

$$x_h = \begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix} = \underline{u} \sin \Omega t = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \sin \Omega t$$

↑ rozdílné amplitudy

$$\ddot{x}_h = -\Omega^2 \underline{u} \sin \Omega t$$

$$-\underline{M}\Omega^2 \underline{u} \sin \Omega t + \underline{K}\underline{u} \sin \Omega t = \underline{0}$$

$$(\underline{K} - \Omega^2 \underline{M})\underline{u} = \underline{0}$$

↑ $\lambda = \Omega^2$ — m. účinová frekvence

↑ vlastní číslo

problém vlastních hodnot matic $\underline{M}$, $\underline{K}$

→ Soustava homogenních lineárních algebraických rovnic. Podmínka netriviálního řešení

$$\det(\underline{K} - \lambda \underline{M}) = 0$$

↑ frekvenční determinant

$$\det\begin{bmatrix} k_1-\lambda I_1 & -k_1 \\ -k_1 & (k_1+k_2)-\lambda\cdot I_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(k_1-\lambda I_1)(k_1+k_2-\lambda I_2)-k_1^2=0$$

$$k_1^2+k_1k_2-\lambda k_1 I_2-\lambda k_1 I_1-\lambda k_2 I_1+\lambda^2 I_1 I_2-k_1^2=0$$

$$\underbrace{\lambda^2(I_1 I_2)+\lambda(-k_1 I_2-k_1 I_1-k_2 I_1)+(\cancel{k_1^2}+k_1k_2)=0}_{\text{frekvenční rovnice}}$$

$\lambda_1=0{,}285e6\,s^{-2}$ $\quad \Omega_1=543{,}16\,s^{-1}$ $\quad f_1=\frac{\Omega_1}{2\pi}=85\,Hz$

$\lambda_2=2{,}379e6\,s^{-2}$ $\quad \Omega_2=1542{,}37\,s^{-1}$ $\quad f_2=\frac{\Omega_2}{2\pi}=245{,}5\,Hz$

Pouze pro tyto dvě fr. může nastat předpokl. pohyb.

Pro každé λ_ν hledáme vektor amplitud harmonických výchylek $\underline{u}_\nu$

$$(\underline{K}-\lambda_\nu \underline{M})\underline{u}_\nu=\underline{0} \qquad \nu=1,2$$

$$\begin{bmatrix} k_1-\lambda_\nu I_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2-\lambda_\nu I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{1\nu} \\ u_{2\nu} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\det(\ ) = 0 \Rightarrow$ rovnice jsou lineárně závislé, stačí použít jednu libovolnou rovnici.

$$(k_1 - \lambda_\nu I_1) u_{1\nu} - k_1 u_{2\nu} = 0$$

$\Downarrow$

získáme poměr amplitud $\frac{u_{2\nu}}{u_{1\nu}} = \frac{k_1 - \lambda_\nu I_1}{k_1} = \varkappa_2$

Pokud zvolíme $u_{1\nu} = 1$

$$\Rightarrow \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \varkappa_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}814 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \varkappa_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}549 \end{bmatrix}$$

<u>Vl. tvary vybudíme:</u>

1) poč. výchylky v poměru prvního/druhého vl. tvaru a nulové poč. rychlosti
2) poč. rychlosti v poměru, 0 poč. výchylky
3) oboje v poměru

Volné kmitání při obecných poč. podm.

$$\varphi_1 = A_1 \cos \Omega_1 t + B_1 \sin \Omega_1 t + A_2 \cos \Omega_2 t + B_2 \sin \Omega_2 t$$

$$\varphi_2 = A_1 k_{21} \cos \Omega_1 t + B_1 k_{21} \sin \Omega_1 t + A_2 k_{22} \cos \Omega_2 t + B_2 k_{22} \sin \Omega_2 t$$

$$\dot{\varphi}_1 = \dots$$
$$\dot{\varphi}_2 = \dots$$

$\Rightarrow A_{1,2}, B_{1,2}$

Vynucené kmitání ($f_0 \neq 0$)

$$\underline{x_p} = \underline{r} \sin \omega t = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \sin \omega t$$

$$\ddot{\underline{x}}_p = -\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \omega^2 \sin \omega t$$

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{H}) \underline{r} = \underline{f_0}$$

$$\Rightarrow \underline{r} = (\underline{K} - \omega^2 \underline{H})^{-1} \underline{f_0}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 - \omega^2 I_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 - \omega^2 I_2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(z)} \cdot \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 I_1 & k_1 \\ k_1 & k_1 - \omega^2 I_1 \end{bmatrix}$$

z ; $\operatorname{adj}(z)$

$$r_1 = \frac{f_0 (k_1 + k_2 - \omega^2 I_2)}{I_1 I_2 (\omega^2 - \Omega_1^2)(\omega^2 - \Omega_2^2)}$$

$$r_2 = \frac{f_0 k_1}{I_1 I_2 (\omega^2 - \Omega_1^2)(\omega^2 - \Omega_2^2)}$$

$\Rightarrow x_p$

$\rightarrow$ antirezonance

$$\omega_a^* = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{I_2}}$$