# Symbolické generování pohybových rovnic pro soustavy poddajných těles

Ladislav Mráz

Vedoucí DP: Prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.

Konzultant: Doc. Dr. Ing. Tomáš Vampola

# Přehled prezentace

- Úvod
  - Sestavování pohybových rovnic
  - Cíl DP
- Kompozitní metoda pro poddajná tělesa
  - Pohybová rovnice poddajného tělesa
  - Algoritmus sestavení matice hmotnosti a vektoru zobec. sil
- Symbolické sestavování pohybových rovnic
  - Úskalí symboliky
  - Substituování
- Diagram vývoje algoritmu
- Schéma vytvořeného algoritmu
- Výsledky modelování pohybu mechanismů
- Závěr

# Úvod

- Pohybové rovnice (tuhá tělesa)

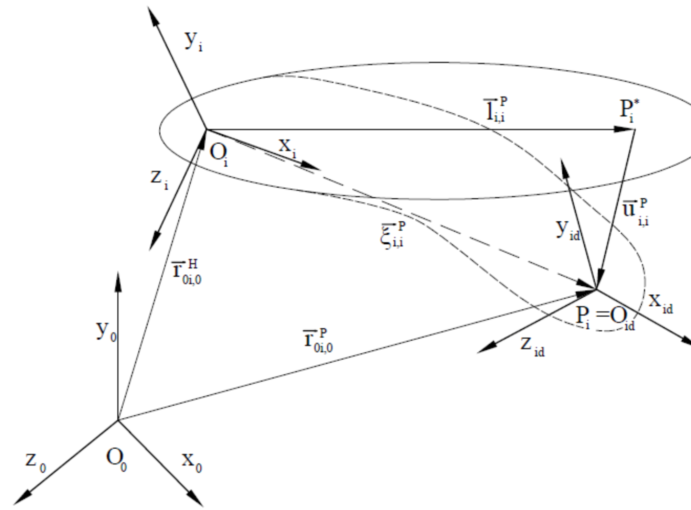
$$M(\vec{x})\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x},\dot{\vec{x}}) \qquad \ddot{\vec{x}} = \begin{bmatrix}\ddot{s}_{01} & \ddot{s}_{12} & \cdots & \ddot{s}_{n-1,n}\end{bmatrix}^T$$

  - Lagrangeovy rovnice … $O(n^3)$ / $O(n^2)$
  - Rekurzivní metody (CRB) … $O(n^2)$ / $O(n)$

- Cíl diplomové práce
  - Algoritmus
    - Symbolické pohybové rovnice poddajných mechanismů
    - Implementace rekurzivní metody Doc. Vampoly
    - Substituování

# Kompozitní metoda pro poddajná tělesa (KMPT)

- Dva druhy souřadnic :
  - Relativní $\vec{s}(t)$
  - Deformační $\vec{e}(t)$




- Vyjádření deformace

$$\vec{u}_{i,i}^P = \begin{bmatrix} u_x(x_p, y_p, z_p, t) \\ u_y(x_p, y_p, z_p, t) \\ u_y(x_p, y_p, z_p, t) \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} {}^t\vartheta_{x1}(x_p, y_p, z_p) & {}^t\vartheta_{x2}(x_p, y_p, z_p) & \dots \\ {}^t\vartheta_{y1}(x_p, y_p, z_p) & {}^t\vartheta_{y2}(x_p, y_p, z_p) & \dots \\ {}^t\vartheta_{z1}(x_p, y_p, z_p) & {}^t\vartheta_{z2}(x_p, y_p, z_p) & \dots \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix}_i = {}^t\vartheta_i^P \; \vec{e}_i(t)$$

$$\vec{\varphi}_{i,i}^P = \begin{bmatrix} \varphi_x(x_p, y_p, z_p, t) \\ \varphi_y(x_p, y_p, z_p, t) \\ \varphi_y(x_p, y_p, z_p, t) \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} {}^r\vartheta_{x1}(x_p, y_p, z_p) & {}^r\vartheta_{x2}(x_p, y_p, z_p) & \dots \\ {}^r\vartheta_{y1}(x_p, y_p, z_p) & {}^r\vartheta_{y2}(x_p, y_p, z_p) & \dots \\ {}^r\vartheta_{z1}(x_p, y_p, z_p) & {}^r\vartheta_{z2}(x_p, y_p, z_p) & \dots \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix}_i = {}^r\vartheta_i^P \; \vec{e}_i(t)$$

# KMPT – Pohybová rovnice

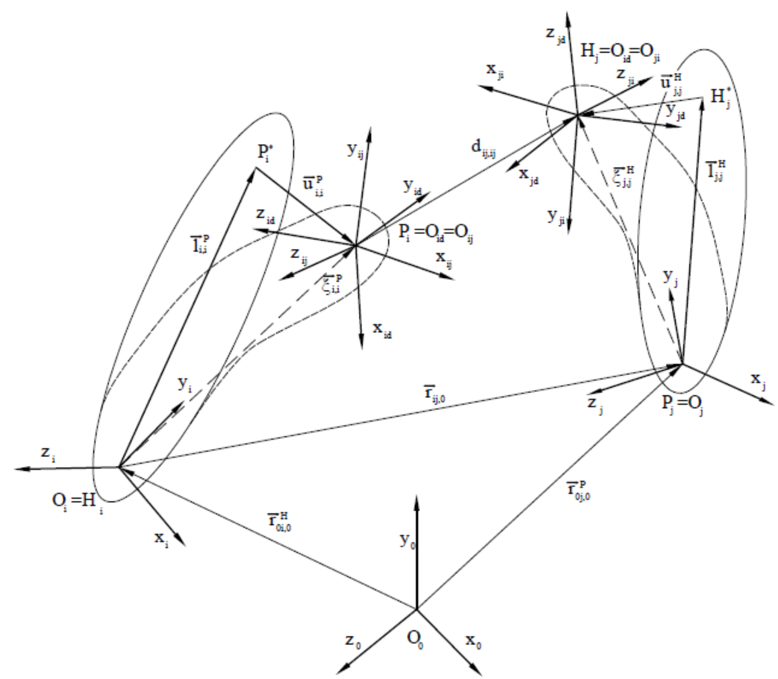
- Kompozitní zrychlení $\vec{A}_{0i,0} = \begin{bmatrix} \ddot{\vec{r}}^{\,H}_{0i,0} \\ \dot{\vec{\omega}}_{0i,0} \end{bmatrix}$

- Mechanika kontinua (princip virtuálních prací, Hookův zákon), Gaussův princip:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\delta\vec{A}_{0i,0}\right)^T\left(I_i\vec{A}_{0i,0}+J_i\ddot{\vec{e}}_i+Q_i\right)+\delta\ddot{\vec{e}}_i^{\,T}\left(J_i^T\vec{A}_{0i,0}+K_i\ddot{\vec{e}}_i+R_i\right)\right]=0$$

- Kinematické závislosti:

$$\vec{A}_{0j,0}=L_1\vec{A}_{0i,0}+L_2\ddot{\vec{e}}_i+L_3\ddot{\vec{e}}_j+L_4\ddot{s}_{ij}+L_5$$



# KMPT – Tvar matic

$$I_i = \begin{bmatrix} E_3 \sum_{k=1}^{N} m_i^k & -\sum_{k=1}^{N} m_i^k \tilde{\xi}_{i,0}^k \\ \left(-\sum_{k=1}^{N} m_i^k \tilde{\xi}_{i,0}^k\right)^T & \sum_{k=1}^{N} m_i^k \left(\tilde{\xi}_{i,0}^k\right)^T \tilde{\xi}_{i,0}^k \end{bmatrix} \quad J_i = \begin{bmatrix} S_{0i} \sum_{k=1}^{N} m_i^k \, {}^t\vartheta_i^k \\ -\sum_{k=1}^{N} m_i^k \left(\tilde{\xi}_{i,0}^k\right)^T S_{0i} \, {}^t\vartheta_i^k \end{bmatrix} \quad K_i = \left[ \sum_{k=1}^{N} m_i^k \left({}^t\vartheta_i^k\right)^T \, {}^t\vartheta_i^k \right]$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{N} m_i^k \tilde{\omega}_{0i,0}^2 S_{0i} \vec{\xi}_{i,i}^k + \sum_{k=1}^{N} m_i^k \tilde{\omega}_{0i,0} S_{0i} \, {}^t\vartheta_i^k \dot{\vec{e}}_i \\ -\sum_{k=1}^{N} m_i^k \left(\tilde{\xi}_{i,0}^k\right)^T \tilde{\omega}_{0i,0}^2 S_{0i} \vec{\xi}_{i,i}^k - 2\sum_{k=1}^{N} m_i^k \left(\tilde{\xi}_{i,0}^k\right)^T \tilde{\omega}_{0i,0} S_{0i} \, {}^t\vartheta_i^k \dot{\vec{e}}_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{N} \vec{f}_{i,0}^k + \sum_{j=1}^{M} p_{i,0}^j \\ -\sum_{k=1}^{N} \left(\tilde{\xi}_{i,0}^k\right)^T \vec{f}_{i,0}^k - \sum_{j=1}^{M} \left(\tilde{\xi}_{i,0}^j\right)^T p_{i,0}^j \end{bmatrix}$$

$$R_i = \left[ \sum_{k=1}^{N} m_i^k \left({}^t\vartheta_i^k\right)^T S_{0i}{}^T \tilde{\omega}_{0i,0}^2 S_{0i} \vec{\xi}_{i,i}^k + 2\sum_{k=1}^{N} m_i^k \left({}^t\vartheta_i^k\right)^T S_{0i}{}^T \tilde{\omega}_{0i,0} S_{0i} \, {}^t\vartheta_i^k \dot{\vec{e}}_i \right]$$

$$- \left[ \sum_{k=1}^{N} \left({}^t\vartheta_i^k\right)^T S_{0i}{}^T \vec{f}_{i,0}^k + \sum_{j=1}^{M} \left({}^t\vartheta_i^k\right)^T S_{0i}{}^T \vec{p}_{i,0}^k + {}^{tsum}\vartheta_i^T K_i^* \, {}^{tsum}\vartheta_i \, \vec{e}_i \right]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} E_3 & -\tilde{r}_{ij,0} \\ 0 & E_3 \end{bmatrix} \qquad L_2 = \begin{bmatrix} Q_1 \\ S_{0i} \, {}^r\vartheta_i^P \end{bmatrix} \qquad L_3 = \begin{bmatrix} -Q_2 \\ -S_{0j} \, {}^r\vartheta_j^H \end{bmatrix}$$

$$L_4 = \begin{bmatrix} Q_3 \\ H_{0ij} \psi_r \end{bmatrix} \qquad L_5 = \begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \dot{\vec{e}}_i - \dot{Q}_2 \dot{\vec{e}}_j + \tilde{\omega}_{0i,0} \dot{\vec{r}}_{ij,0} + \dot{Q}_3 \dot{s}_{ij} \\ \tilde{\omega}_{0i,0} S_{0i} \, {}^r\vartheta_i^P \dot{\vec{e}}_i - \tilde{\omega}_{0j,0} S_{0j} \, {}^r\vartheta_j^H \dot{\vec{e}}_j + \dot{H}_{0ij} \psi_r \dot{s}_{ij} \end{bmatrix}$$

# KMPT – Explicitní pohybová rovnice

$$M(\vec{x})\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x},\dot{\vec{x}})$$

$$\begin{bmatrix} M^{R} & M^{R,F} \\ \left(M^{R,F}\right)^{T} & M^{F} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\vec{S}} \\ \ddot{\vec{E}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{R} \\ F^{F} \end{bmatrix} \qquad \ddot{\vec{S}} = \begin{bmatrix} \ddot{s}_{01} \\ \ddot{s}_{12} \\ \vdots \\ \ddot{s}_{n-1,n} \end{bmatrix} \qquad \ddot{\vec{E}} = \begin{bmatrix} \ddot{\vec{e}}_{1} \\ \ddot{\vec{e}}_{2} \\ \vdots \\ \ddot{\vec{e}}_{n} \end{bmatrix}$$

- Algoritmus sestavení *M* a *F* (Nerozvětvený řetězec, bez smyček-numerika)
  - Př.:

$$PDMR_n = I_n$$

$$PDMR_i = {}^{i+1}L_1^T \cdot PDMR_{i+1} \cdot {}^{i+1}L_1 + I_i \quad , i = n-1, n-2, \dots, 1$$

$$PLDR_i = {}^{i}L_4^T \cdot PDMR_i \cdot {}^{i}L_1$$

$$POM_{i-1} = PLDR_i$$

$$POM_j = POM_{j+1} \cdot {}^{j+1}L_1 \quad , j = i-2, i-3, \dots, 1$$

$$m_{i,i}^R = {}^{i}L_4^T \cdot PDMR_i \cdot {}^{i}L_4 \quad , i = n, n-1, \dots, 1$$

$$m_{i,j}^R = POM_j \cdot {}^{j}L_4 \quad , j = i-1, i-2, \dots, 1$$

$$F^R = \begin{bmatrix} F_1^R \\ \vdots \\ F_{n-1}^R \\ F_n^R \end{bmatrix}$$

$$M^R = \begin{bmatrix} M_{1,1}^R & \cdots & M_{1,n-1}^R & M_{1,n}^R \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{n-1,1}^R & \cdots & M_{n-1,n-1}^R & M_{n-1,n}^R \\ M_{n,1}^R & \cdots & M_{n,n-1}^R & M_{n,n}^R \end{bmatrix}$$

# Symbolické sestavování pohybových rovnic

- Násobení 3 symbolických matic *A*,*B*,*C* bez substituování / se substituováním:
  - Počet Operací: **180 / 90**
  - Nárůst výrazů
- Zavedení operátorů substitucí:

$$\mathscr{L}(A), \mathscr{L}_S(A)$$

…obecná, resp. symetrická matice

Vytvoření substitucí, Uložení → Soubor substitucí (textový)

$$A=\begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 \\ a4 & a5 & a6 \\ a7 & a8 & a9 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b1 & b2 & b3 \\ b4 & b5 & b6 \\ b7 & b8 & b9 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} c1 & c2 & c3 \\ c4 & c5 & c6 \\ c7 & c8 & c9 \end{bmatrix}$$

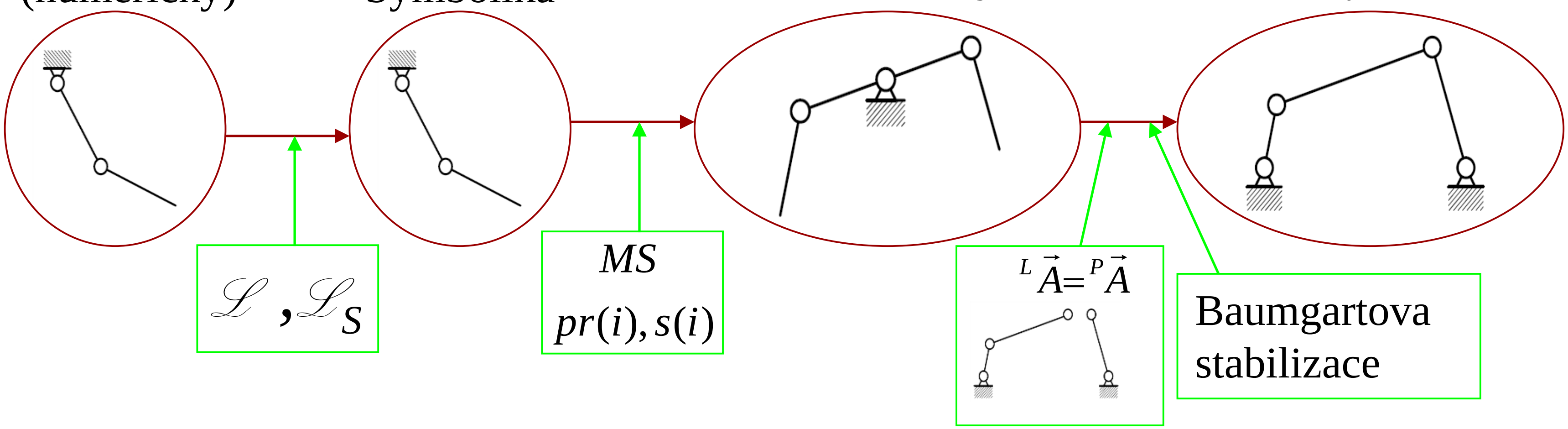
$$A\cdot B=\begin{bmatrix} a1b1+a2b4+a3b7 & a1b2+a2b5+a3b8 & a1b3+a2b6+a3b9 \\ a4b1+a5b4+a6b7 & a4b2+a5b5+a6b8 & a4b3+a5b6+a6b9 \\ a7b1+a8b4+a9b7 & a7b2+a8b5+a9b8 & a7b3+a8b6+a9b9 \end{bmatrix}$$

$$D=\mathscr{L}(A\cdot B)=\begin{bmatrix} sub1 & sub2 & sub3 \\ sub4 & sub5 & sub6 \\ sub7 & sub8 & sub9 \end{bmatrix}$$

$$sub1=(a1b1+a2b4+a3b7) \quad sub2=(a1b2+a2b5+a3b8) \quad sub3=(a1b3+a2b6+a3b9)$$
$$sub4=(a4b1+a5b4+a6b7) \quad sub5=(a4b2+a5b5+a6b8) \quad sub6=(a4b3+a5b6+a6b9)$$
$$sub7=(a7b1+a8b4+a9b7) \quad sub8=(a7b2+a8b5+a9b8) \quad sub9=(a7b3+a8b6+a9b9)$$

# Vývoj algoritmu - diagram

| Jednoduchý řetězec (numericky) | Jednoduchý řetězec - Symbolika | Rozvětvené mechanismy | Mechanismy se smyčkami |
|---|---|---|---|




Rozpojení smyčky

$\mathscr{L}, \mathscr{L}_S$ …Operátory substitucí

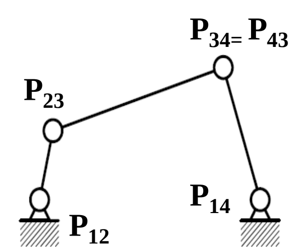
$MS$ …**Matice struktury**

$pr(i)$ …Předcházející těleso tělesu $i$

$s(i)$ …Následující tělesa tělesa $i$

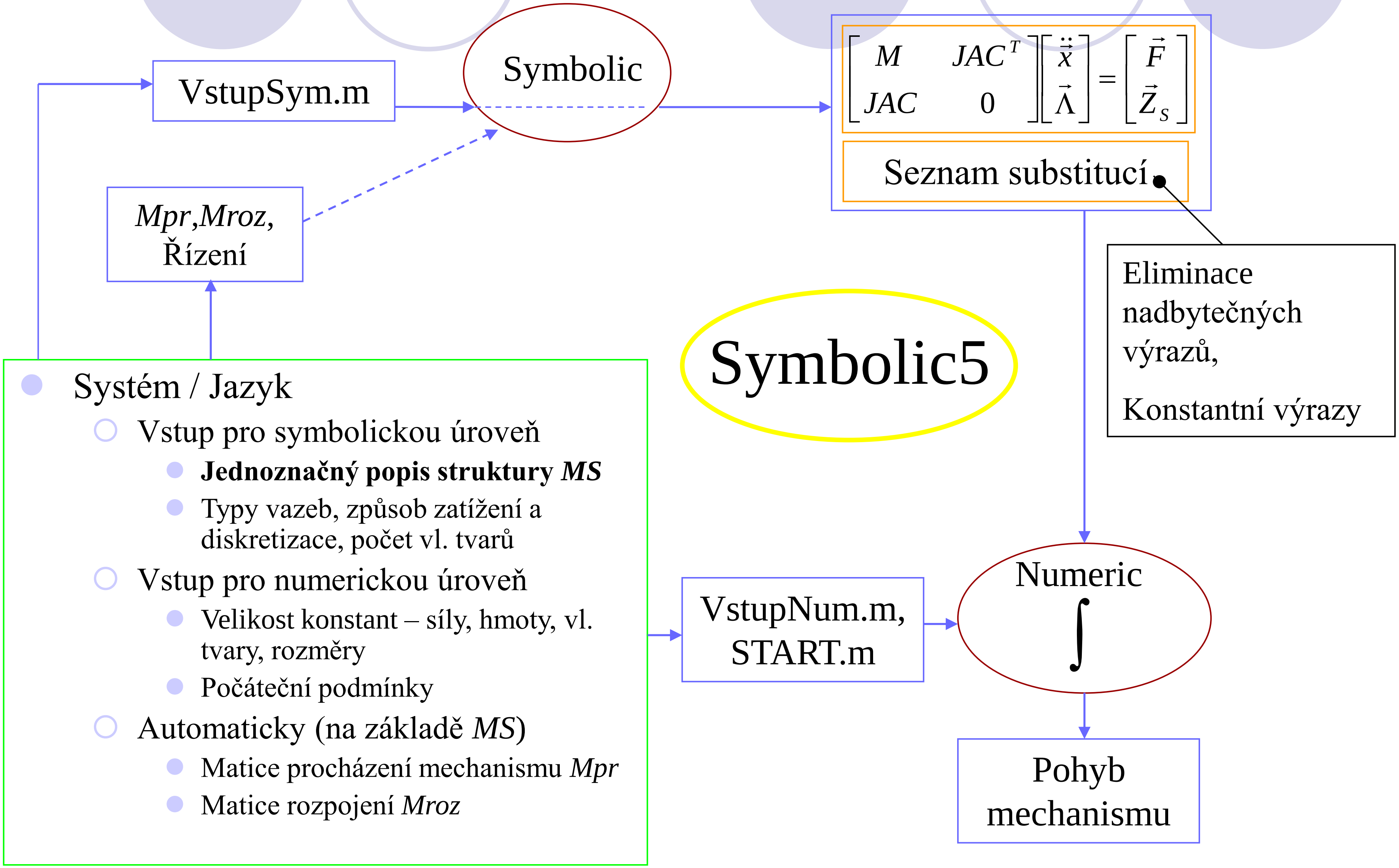
$$MS = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$MS = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$




$\Downarrow$

# Algoritmus pro mechanismy obecné struktury




- Systém / Jazyk
  - Vstup pro symbolickou úroveň
    - **Jednoznačný popis struktury *MS***
    - Typy vazeb, způsob zatížení a diskretizace, počet vl. tvarů
  - Vstup pro numerickou úroveň
    - Velikost konstant – síly, hmoty, vl. tvary, rozměry
    - Počáteční podmínky
  - Automaticky (na základě *MS*)
    - Matice procházení mechanismu *Mpr*
    - Matice rozpojení *Mroz*

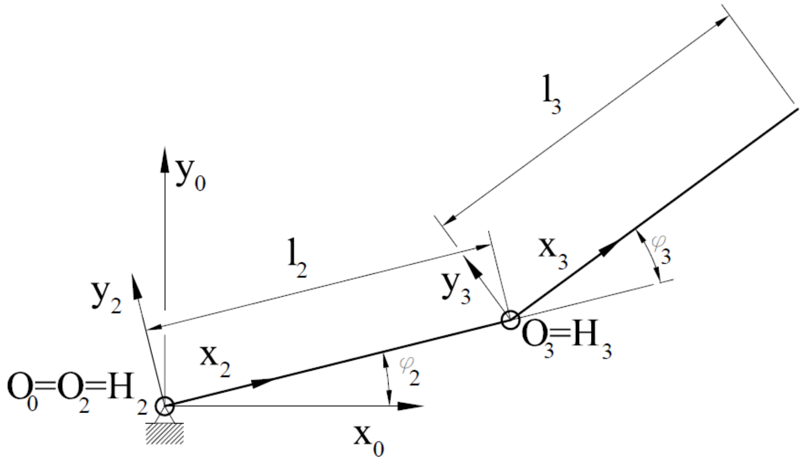
# Ukázka souboru substitucí

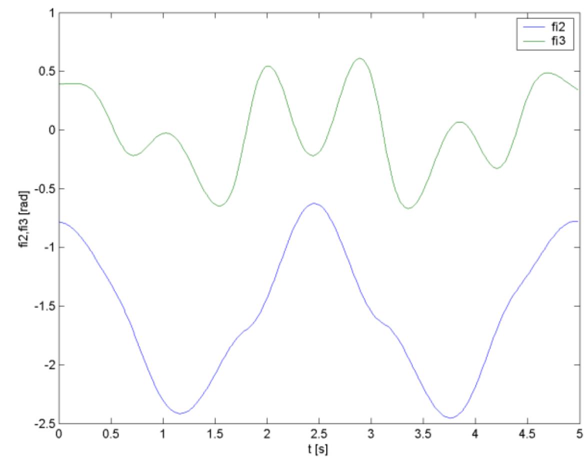
```
sub216=sub13*(sub136+lp7xb1)+sub14*(sub146+lp7yb1)+sub15*(sub156+lp7zb1);
sub217=sub13*(sub137+lp8xb1)+sub14*(sub147+lp8yb1)+sub15*(sub157+lp8zb1);
sub218=sub13*(sub138+lp9xb1)+sub14*(sub148+lp9yb1)+sub15*(sub158+lp9zb1);
sub219=sub13*(sub139+lp10xb1)+sub14*(sub149+lp10yb1)+sub15*(sub159+lp10zb1);
sub220=sub7*sub160+sub8*sub170+sub9*sub180;
sub229=sub7*sub169+sub8*sub179+sub9*sub189;
sub230=sub10*sub160+sub11*sub170+sub12*sub180;
sub239=sub10*sub169+sub11*sub179+sub12*sub189;
sub240=sub13*sub160+sub14*sub170+sub15*sub180;
sub249=sub13*sub169+sub14*sub179+sub15*sub189;
sub250=-sub18*sub200+sub17*sub210+sub220;
sub259=-sub18*sub209+sub17*sub219+sub229;
sub260=sub18*sub190-sub16*sub210+sub230;
sub269=sub18*sub199-sub16*sub219+sub239;
sub270=-sub17*sub190+sub16*sub200+sub240;
sub279=-sub17*sub199+sub16*sub209+sub249;
sub280=v1p1xb2*e1b2+v2p1xb2*e2b2+v3p1xb2*e3b2;
```

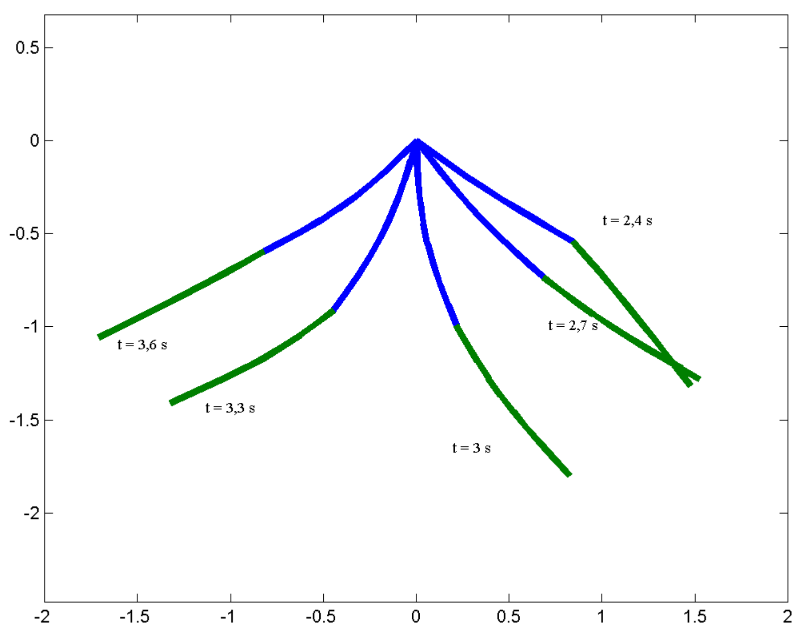
Úprava – Urychlení vyčíslování

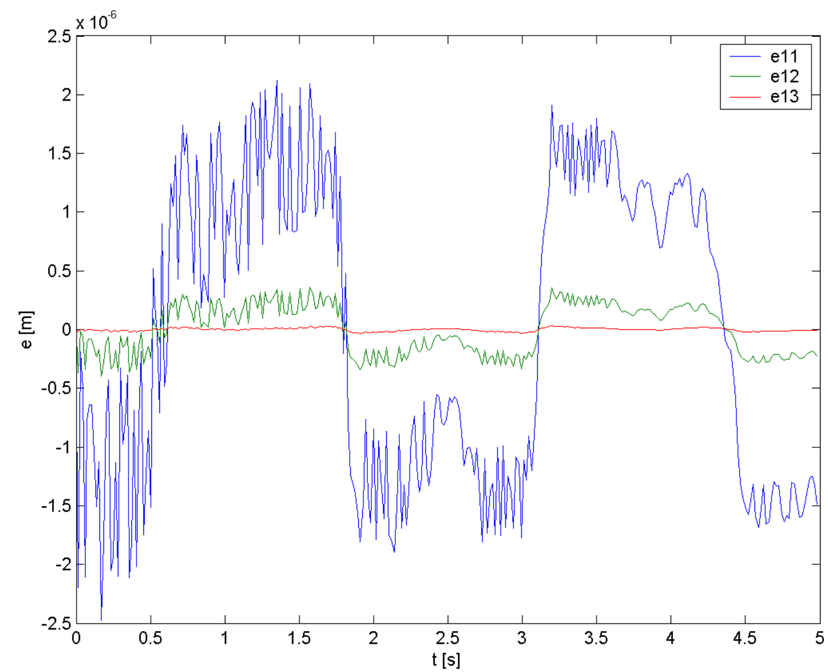
```
sub(216)=sub(13)*(sub(136)+kon(134))+sub(14)*(sub(146)+kon(135))+sub(15)*(sub(156)+kon(136));
sub(217)=sub(13)*(sub(137)+kon(156))+sub(14)*(sub(147)+kon(157))+sub(15)*(sub(157)+kon(158));
sub(218)=sub(13)*(sub(138)+kon(178))+sub(14)*(sub(148)+kon(179))+sub(15)*(sub(158)+kon(180));
sub(219)=sub(13)*(sub(139)+kon(200))+sub(14)*(sub(149)+kon(201))+sub(15)*(sub(159)+kon(202));
sub(220)=sub(7)*sub(160)+sub(8)*sub(170)+sub(9)*sub(180);
sub(229)=sub(7)*sub(169)+sub(8)*sub(179)+sub(9)*sub(189);
sub(230)=sub(10)*sub(160)+sub(11)*sub(170)+sub(12)*sub(180);
sub(239)=sub(10)*sub(169)+sub(11)*sub(179)+sub(12)*sub(189);
sub(240)=sub(13)*sub(160)+sub(14)*sub(170)+sub(15)*sub(180);
sub(249)=sub(13)*sub(169)+sub(14)*sub(179)+sub(15)*sub(189);
sub(250)=-sub(18)*sub(200)+sub(17)*sub(210)+sub(220);
sub(259)=-sub(18)*sub(209)+sub(17)*sub(219)+sub(229);
sub(260)=sub(18)*sub(190)-sub(16)*sub(210)+sub(230);
sub(269)=sub(18)*sub(199)-sub(16)*sub(219)+sub(239);
sub(270)=-sub(17)*sub(190)+sub(16)*sub(200)+sub(240);
sub(279)=-sub(17)*sub(199)+sub(16)*sub(209)+sub(249);
sub(280)=kon(234)*X(6)+kon(240)*X(7)+kon(246)*X(8);
```

# Výsledky – Dvojité kyvadlo

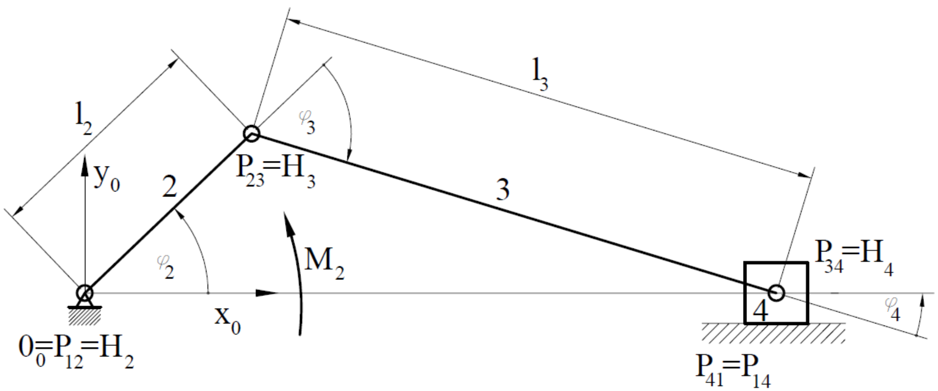


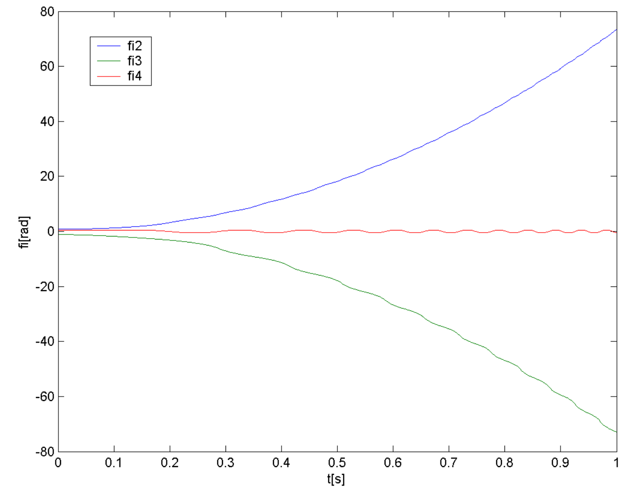



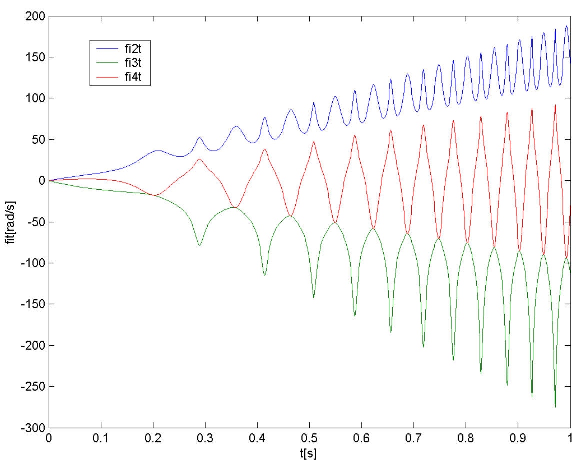



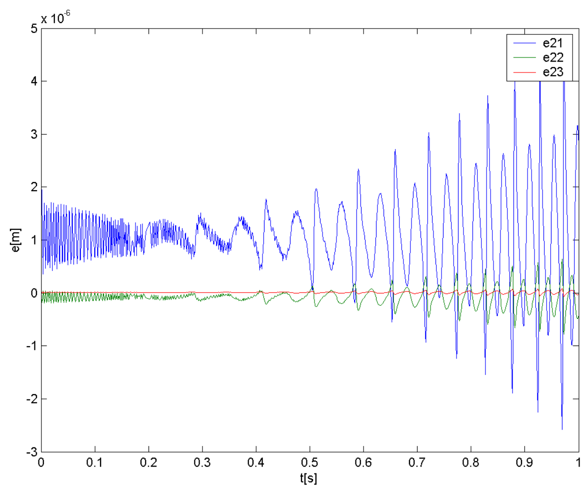



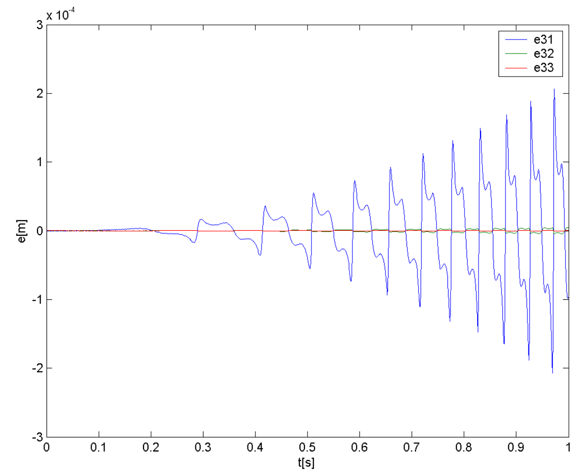
# Výsledky – Klikový mechanismus



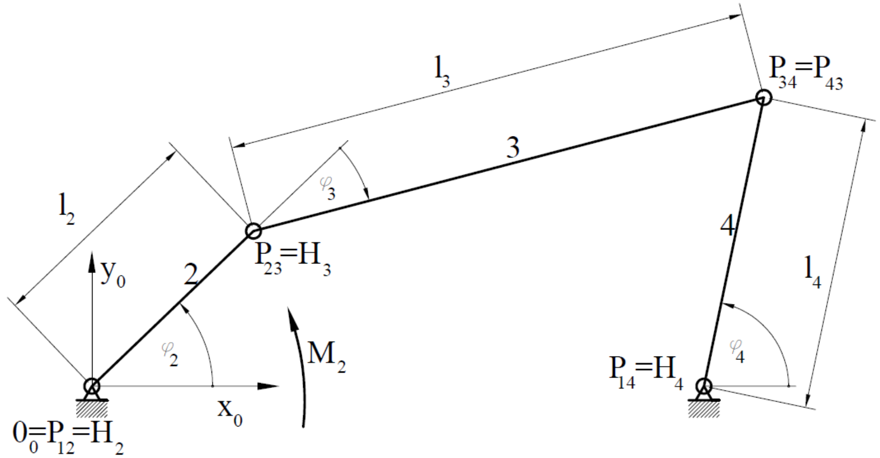



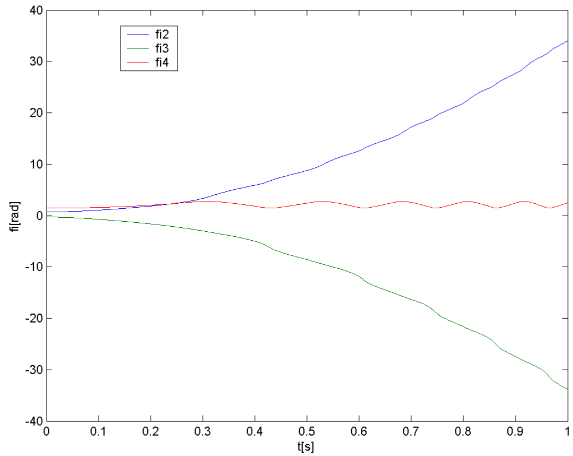



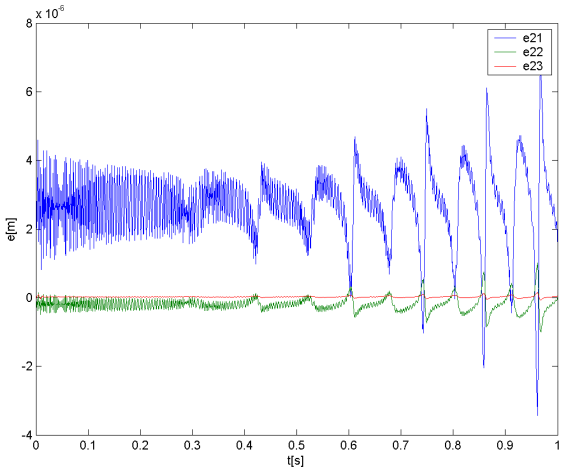



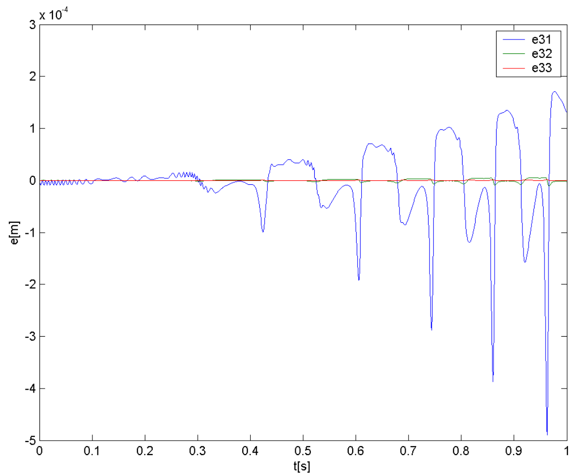



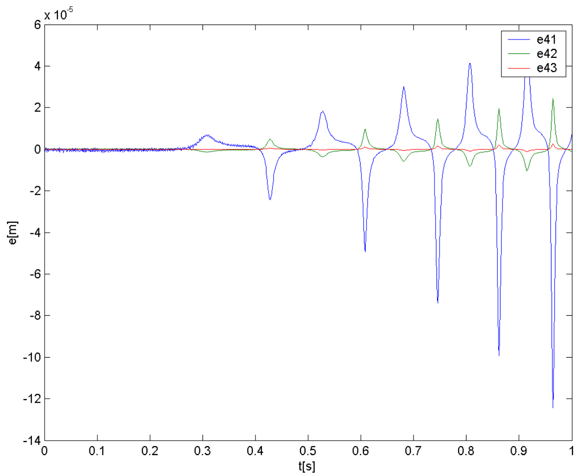
# Výsledky - Čtyřkloubový mechanismus



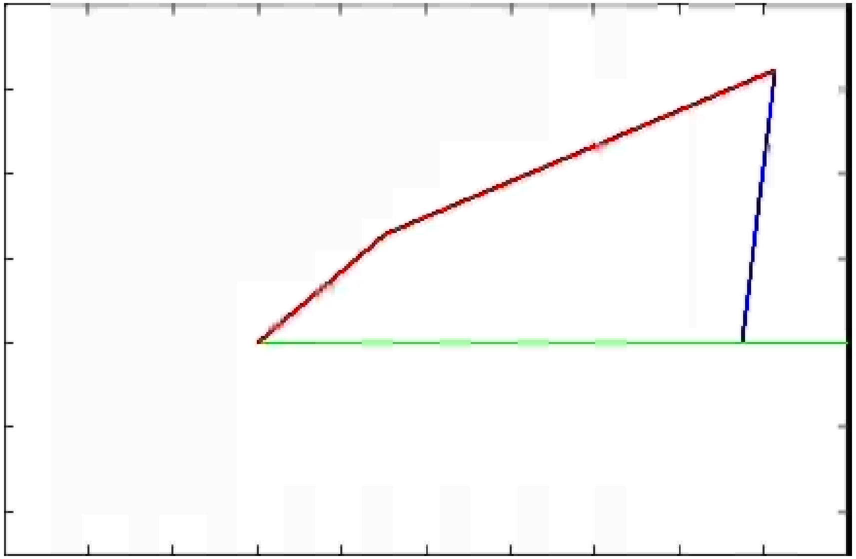



# Závěr

- Vytvořen algoritmus automatického sestavování pohybových rovnic poddajných těles
- Testován na několika mechanismech
- Ověřena jeho funkčnost
- Možné použití pro složitější mechanismy



Děkuji za pozornost